平成27年市区町村別生命表における平均余命の誤差評価について

六車（ムグルマ） 史（フミト）＊1　中井（ナカイ） 亮平（リョウヘイ）＊2

目的　平成27年市区町村別生命表報告書に記載のある，平均余命の標準誤差について，その評価式の導出過程を明らかにするとともに，人口規模と誤差の大小関係を観察することを目的とした。

方法　Chin Long Chiang氏の方法に基づき，実績死亡数を人口の回数分の真の死亡確率によるベルヌーイ試行の結果とみなすことから出発し，平均余命の標準誤差を，死亡率の分散を使って表現した。

結論　人口の常用対数と平均寿命の標準誤差率の間には負の相関がみとめられ，相関係数は男－0.79，女－0.74であった。

キーワード　試行結果としての死亡数，平均余命の誤差，人口規模

Ⅰ　は じ め に

生命表の作成基礎期間における死亡数の実績を，真の死亡確率による人口の回数分のベルヌーイ試行の結果とみなすことから出発して，平均余命の誤差を評価することを考える。このとき，人口は試行回数に相当する定数，死亡数は二項分布にしたがう確率変数（の一実現値）ということになる。以下の議論においては，真の死亡確率から得られる真の生命表を措定したうえで，実績から得られる具体的な値に対しては，それを確率変数の一実現値とみなし，ハット（^）を付して区別する。

Ⅱ　ベルヌーイ試行の結果としての死亡数

一般に，人口Pに対して作成基礎期間中の死亡数$\hat{D}$を得るとき，真の死亡率qを措定すると，$\hat{D}$は二項分布にしたがう確率変数

$$\hat{D} \sim Bin(P,q)$$

とみなすことができ，このとき，

$$E(\hat{D})=P \cdot q,\quad V(\hat{D})=P \cdot p \cdot q$$

である。したがって，死亡率および生存率を

$$\hat{q}=\frac{\hat{D}}{P},\quad \hat{p}=1-\hat{q}$$

により推定するとき，

$$E(\hat{q})=q,\quad E(\hat{p})=p,\quad V(\hat{q})=V(\hat{p})=\frac{p \cdot q}{P}$$

であって，その標本推定値は，

$$\hat{E}(\hat{q})=\hat{q},\quad \hat{E}(\hat{p})=\hat{p},\quad \hat{V}(\hat{q})=\hat{V}(\hat{p})=\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{P}$$

で与えられる。同じことの繰り返しのように思われるかもしれないが，以下の議論において，定数と変数の区別（ハットのあるなし）はきわめて重要である。

Ⅲ　平均余命の標準誤差－一般論－

さて，ベルヌーイ試行の結果としての死亡数の実績値から計算された生命表があったとして，その年齢階級区分が，

$$x_0=0,\quad x_{i+1}=x_i+n_i\,(i=0,1,2,\cdots,\omega-1)$$

で与えられ，最終到達年齢x_ωにおいては$\hat{l}(x_\omega)=0$が達成されているものとする。ここで，$0 \leqq i \leqq j \leqq \omega-1$なる$i$，$j$に対して，$x_i$から$x_j+n_j$への生存率$\hat{p}[x_i,x_j+n_j]$は，互いに独立な確率変数の積

$$\hat{p}[x_i,x_j+n_j]=\prod_{k=i}^{j}\hat{p}[x_k,x_k+n_k]$$

へと分解される。なぜなら，各$\hat{p}[x_k,x_k+n_k]$（$k=i,\cdots,j$）は異なる年齢階級における生存率だからである。

＊１厚生労働省政策統括官付参事官付審査解析室主査　＊２同統計専門官

定義から，任意のx_i（$0\leqq i\leqq \omega-1$）に対して，

$$\hat{\mathring{e}}(x_i)=\frac{\hat{T}(x_i)}{\hat{l}(x_i)}=\frac{1}{\hat{l}(x_i)}\sum_{j=i}^{\omega-1}\hat{L}[x_j,x_j+n_j]$$

であって，ここに$\hat{L}[x_j,x_j+n_j]$は$\hat{l}(x_j)$と$\hat{l}(x_j+n_j)$の重み付き平均

$$\begin{aligned}\hat{L}[x_j,x_j+n_j]&=n_j\cdot\hat{l}(x_j+n_j)\\&\quad+\hat{a}[x_j,x_j+n_j]\cdot\hat{d}[x_j,x_j+n_j]\\&=n_j\cdot\hat{l}(x_j+n_j)\\&\quad+\hat{a}[x_j,x_j+n_j]\cdot\left(\hat{l}(x_j)-\hat{l}(x_j+n_j)\right)\\&=\hat{a}[x_j,x_j+n_j]\cdot\hat{l}(x_j)\\&\quad+(n_j-\hat{a}[x_j,x_j+n_j])\cdot\hat{l}(x_j+n_j)\end{aligned}$$

として表現できる（重み$=n_j=$区間の幅）。ここで，特定の作成基礎期間における年齢階級別死亡状況のパターンは大きく変動しないと考えるならば，$\hat{a}$の値はおおよそ不変と考えられる。そうすると，$\hat{a}[x_j,x_j+n_j]$は確率変数ではなくなり，ハットが取れる。すなわち，定常人口の表現は，

$$\begin{aligned}\hat{L}[x_j,x_j+n_j]&=a[x_j,x_j+n_j]\cdot\hat{l}(x_j)\\&\quad+(n_j-a[x_j,x_j+n_j])\cdot\hat{l}(x_j+n_j)\end{aligned}$$

と改められる。ここで，$x_j+n_j=x_{j+1}$であったことを思い出し，平均余命の式に代入すると，

$$\begin{aligned}\hat{\mathring{e}}(x_i)&=\frac{1}{\hat{l}(x_i)}[\{a[x_i,x_i+n_i]\cdot\hat{l}(x_i)\\&\quad+(n_i-a[x_i,x_i+n_i])\cdot\hat{l}(x_{i+1})\}\\&\quad+\{a[x_{i+1},x_{i+1}+n_{i+1}]\cdot\hat{l}(x_{i+1})\\&\quad+(n_{i+1}-a[x_{i+1},x_{i+1}+n_{i+1}])\cdot\hat{l}(x_{i+2})\}\\&\quad+\cdots\\&\quad+\{a[x_{\omega-1},x_{\omega-1}+n_{\omega-1}]\cdot\hat{l}(x_{\omega-1})\\&\quad+(n_{\omega-1}-a[x_{\omega-1},x_{\omega-1}+n_{\omega-1}])\cdot\hat{l}(x_\omega)\}]\\&=a[x_i,x_i+n_i]\\&\quad+\sum_{j=i}^{\omega-2}(n_j-a[x_j,x_j+n_j]+a[x_{j+1},x_{j+1}+n_{j+1}])\\&\quad\cdot\hat{p}[x_i,x_{j+1}]\end{aligned}$$

となるから，

$$c_i=n_i-a[x_i,x_{i+1}]+a[x_{i+1},x_{i+2}]\quad(i=0,1,2,\cdots,\omega-2)$$

と定義すると，

$$\hat{\mathring{e}}(x_i)=a[x_i,x_i+n_i]+\sum_{j=i}^{\omega-2}c_j\cdot\hat{p}[x_i,x_{j+1}]$$

を得る。このことから，

$$\begin{aligned}&E\left(\hat{\mathring{e}}(x_i)\right)\\&=a[x_i,x_i+n_i]+\sum_{j=i}^{\omega-2}c_j\cdot E(\hat{p}[x_i,x_{j+1}])\\&=a[x_i,x_i+n_i]+\sum_{j=i}^{\omega-2}c_j\cdot E\left(\prod_{k=i}^{j}\hat{p}[x_k,x_{k+1}]\right)\\&=a[x_i,x_i+n_i]+\sum_{j=i}^{\omega-2}c_j\cdot\prod_{k=i}^{j}E(\hat{p}[x_k,x_{k+1}])\\&=a[x_i,x_i+n_i]+\sum_{j=i}^{\omega-2}c_j\cdot\prod_{k=i}^{j}p[x_k,x_{k+1}]\\&=a[x_i,x_i+n_i]+\sum_{j=i}^{\omega-2}c_j\cdot p[x_i,x_{j+1}]\\&=\mathring{e}(x_i)\end{aligned}$$

$$V\left(\hat{\mathring{e}}(x_i)\right)=V\left(\sum_{j=i}^{\omega-2}c_j\cdot\hat{p}[x_i,x_{j+1}]\right)$$

であることがわかる。

ここで，

$$\hat{S}_i=\sum_{j=i}^{\omega-2}c_j\cdot\hat{p}[x_i,x_{j+1}],\quad S_i=\sum_{j=i}^{\omega-2}c_j\cdot p[x_i,x_{j+1}]$$

と定義すると，

$$E(\hat{S}_i)=S_i,\quad V(\hat{S}_i)=V\left(\hat{\mathring{e}}(x_i)\right)$$

であって，簡単のため，

$$\hat{p}_i=\hat{p}[x_i,x_{i+1}],\quad a_i=a[x_i,x_{i+1}]$$

のように書くことにすると，

$$\begin{aligned}\hat{S}_i&=\sum_{j=i}^{\omega-2}c_j\cdot\hat{p}[x_i,x_{j+1}]\\&=c_i\cdot\hat{p}_i\\&\quad+c_{i+1}\cdot\hat{p}_i\cdot\hat{p}_{i+1}\\&\quad+\cdots\\&\quad+c_{\omega-2}\cdot\hat{p}_i\cdot\cdots\cdot\hat{p}_{\omega-2}\\&=\hat{p}_i(c_i+c_{i+1}\cdot\hat{p}_{i+1}+\cdots+c_{\omega-2}\cdot\hat{p}_{i+1}\cdot\cdots\cdot\hat{p}_{\omega-2})\\&=\hat{p}_i(c_i+\hat{S}_{i+1})\end{aligned}$$

なる漸化式が成り立っていることがわかる。ここで，$\hat{S}_{i+1}$は$\hat{p}_{i+1},\cdots,\hat{p}_{\omega-2}$の関数であって$\hat{p}_i$とは独立，つまり確率変数$\hat{p}_i$と$c_i+\hat{S}_{i+1}$は独立である。独立な

確率変数の積の期待値は，個々の確率変数の期待値の積に等しくなることと，

（２乗の期待値）＝分散＋（期待値）^{2}

であることを使えば，

$$
\begin{aligned}
V\left(\hat{\mathring{e}}(x_i)\right) &= V(\hat{S}_i)\\
&= E(\hat{S}_i^2) - \{E(\hat{S}_i)\}^2\\
&= E\left(\hat{p}_i^2 \cdot (c_i+\hat{S}_{i+1})^2\right) - S_i^2\\
&= E(\hat{p}_i^2) \cdot E\left((c_i+\hat{S}_{i+1})^2\right)\\
&\quad - p_i^2 \cdot (c_i+S_{i+1})^2\\
&= (V(\hat{p}_i) + \{E(\hat{p}_i)\}^2) \cdot E(c_i^2 + 2 \cdot c_i \cdot \hat{S}_{i+1}\\
&\quad + \hat{S}_{i+1}^2) - p_i^2 \cdot (c_i+S_{i+1})^2\\
&= \{V(\hat{p}_i) + p_i^2\}\{c_i^2 + 2 \cdot c_i \cdot E(\hat{S}_{i+1}) + E(\hat{S}_{i+1}^2)\}\\
&\quad - p_i^2 \cdot (c_i+S_{i+1})^2\\
&= \{V(\hat{p}_i) + p_i^2\} \cdot (c_i^2 + 2 \cdot c_i \cdot S_{i+1} + V(\hat{S}_{i+1})\\
&\quad + \{E(\hat{S}_{i+1})\}^2) - p_i^2(c_i+S_{i+1})^2\\
&= \{V(\hat{p}_i) + p_i^2\} \cdot \{c_i^2 + 2 \cdot c_i \cdot S_{i+1} + V(\hat{S}_{i+1})\\
&\quad + S_{i+1}^2\} - p_i^2 \cdot (c_i+S_{i+1})^2\\
&= \{V(\hat{p}_i) + p_i^2\} \cdot \{(c_i+S_{i+1})^2 + V(\hat{S}_{i+1})\}\\
&\quad - p_i^2 \cdot (c_i+S_{i+1})^2\\
&= \{V(\hat{p}_i) + p_i^2\} \cdot V(\hat{S}_{i+1}) + V(\hat{p}_i) \cdot (c_i+S_{i+1})^2\\
&= E(\hat{p}_i^2) \cdot V(\hat{S}_{i+1}) + (c_i+S_{i+1})^2 \cdot V(\hat{p}_i)
\end{aligned}
$$

なる計算が可能で，これから，$V\left(\hat{\mathring{e}}(x_i)\right)$に関する漸化式

$$
\begin{aligned}
V\left(\hat{\mathring{e}}(x_i)\right) &= E(\hat{p}_i^2) \cdot V\left(\hat{\mathring{e}}(x_{i+1})\right)\\
&\quad + \{n_i - a_i + \mathring{e}(x_{i+1})\}^2 \cdot V(\hat{p}_i)
\end{aligned}
$$

を得る。

さてここで，確率変数$\hat{\mathring{e}}(x_i)$の上限は，

$$\hat{\mathring{e}}(x_{\omega-1}) = a_{\omega-1}$$

と，定数になるから，

$$V\left(\hat{\mathring{e}}(x_{\omega-1})\right) = 0$$

である。これから始まって，漸化式を使って下におりていくと，帰納的に

$$
\begin{aligned}
V\left(\hat{\mathring{e}}(x_{\omega-2})\right) &= E(\hat{p}_{\omega-2}^2) \cdot V\left(\hat{\mathring{e}}(x_{\omega-1})\right)\\
&\quad + \{n_{\omega-2} - a_{\omega-2} + \mathring{e}(x_{\omega-1})\}^2 \cdot V(\hat{p}_{\omega-2})\\
&= \{n_{\omega-2} - a_{\omega-2} + \mathring{e}(x_{\omega-1})\}^2 \cdot V(\hat{p}_{\omega-2})\\
V\left(\hat{\mathring{e}}(x_{\omega-3})\right) &= E(\hat{p}_{\omega-3}^2) \cdot V\left(\hat{\mathring{e}}(x_{\omega-2})\right)\\
&\quad + \{n_{\omega-3} - a_{\omega-3} + \mathring{e}(x_{\omega-2})\}^2 \cdot V(\hat{p}_{\omega-3})\\
&= E(\hat{p}_{\omega-3}^2) \cdot \{n_{\omega-2} - a_{\omega-2} + \mathring{e}(x_{\omega-1})\}^2\\
&\quad \cdot V(\hat{p}_{\omega-2})\\
&\quad + \{n_{\omega-3} - a_{\omega-3} + \mathring{e}(x_{\omega-2})\}^2 \cdot V(\hat{p}_{\omega-3})\\
V\left(\hat{\mathring{e}}(x_{\omega-4})\right) &= E(\hat{p}_{\omega-4}^2) \cdot V\left(\hat{\mathring{e}}(x_{\omega-3})\right)\\
&\quad + \{n_{\omega-4} - a_{\omega-4} + \mathring{e}(x_{\omega-3})\}^2 \cdot V(\hat{p}_{\omega-4})\\
&= E(\hat{p}_{\omega-4}^2)\\
&\quad \cdot [E(\hat{p}_{\omega-3}^2) \cdot \{n_{\omega-2} - a_{\omega-2} + \mathring{e}(x_{\omega-1})\}^2\\
&\quad \cdot V(\hat{p}_{\omega-2})\\
&\quad + \{n_{\omega-3} - a_{\omega-3} + \mathring{e}(x_{\omega-2})\}^2 \cdot V(\hat{p}_{\omega-3})]\\
&\quad + \{n_{\omega-4} - a_{\omega-4} + \mathring{e}(x_{\omega-3})\}^2 \cdot V(\hat{p}_{\omega-4})\\
&= E(\hat{p}_{\omega-4}^2) \cdot E(\hat{p}_{\omega-3}^2)\\
&\quad \cdot \{n_{\omega-2} - a_{\omega-2} + \mathring{e}(x_{\omega-1})\}^2 \cdot V(\hat{p}_{\omega-2})\\
&\quad + E(\hat{p}_{\omega-4}^2) \cdot \{n_{\omega-3} - a_{\omega-3} + \mathring{e}(x_{\omega-2})\}^2\\
&\quad \cdot V(\hat{p}_{\omega-3})\\
&\quad + \{n_{\omega-4} - a_{\omega-4} + \mathring{e}(x_{\omega-3})\}^2 \cdot V(\hat{p}_{\omega-4})\\
&= E(\{\hat{p}[x_{\omega-4}, x_{\omega-2}]\}^2)\\
&\quad \cdot \{n_{\omega-2} - a_{\omega-2} + \mathring{e}(x_{\omega-1})\}^2 \cdot V(\hat{p}_{\omega-2})\\
&\quad + E(\{\hat{p}[x_{\omega-4}, x_{\omega-3}]\}^2)\\
&\quad \cdot \{n_{\omega-3} - a_{\omega-3} + \mathring{e}(x_{\omega-2})\}^2 \cdot V(\hat{p}_{\omega-3})\\
&\quad + E(\{\hat{p}[x_{\omega-4}, x_{\omega-4}]\}^2)\\
&\quad \cdot \{n_{\omega-4} - a_{\omega-4} + \mathring{e}(x_{\omega-3})\}^2 \cdot V(\hat{p}_{\omega-4})
\end{aligned}
$$

等々となるので，これらの統一的な表現として，平均余命の分散の一般式

$$
\begin{aligned}
&V\left(\hat{\mathring{e}}(x_i)\right)\\
&= \sum_{j=i}^{\omega-2} E(\{\hat{p}[x_i, x_j]\}^2) \cdot \{n_j - a_j + \mathring{e}(x_{j+1})\}^2 \cdot V(\hat{p}_j)
\end{aligned}
\quad \cdots①
$$

を得る。

Ⅳ　平成27年市区町村別生命表への応用

さて，平成27年市区町村別生命表では，年齢階級を

$(x, n) = (0, 1)$，$(1, 4)$，$(5, 5)$，$(10, 5)$，…，$(90, 5)$，$(95, \infty)$

と取り，平成27年都道府県別生命表の結果を所与のものとして，都道府県i市区町村jの死亡率を以下の方法によりベイズ推定した。

まず，都道府県 i における市区町村 j ごとの粗（中央）死亡率の，人口の重み付き平均および分散 ${}_nE_x^i$，${}_nV_x^i$ から決まるパラメータ

$${}_n\alpha_x^i = {}_nE_x^i \cdot \left\{ \frac{{}_nE_x^i(1-{}_nE_x^i)}{{}_nV_x^i} - 1 \right\},$$

$${}_n\beta_x^i = (1-{}_nE_x^i) \cdot \left\{ \frac{{}_nE_x^i(1-{}_nE_x^i)}{{}_nV_x^i} - 1 \right\}$$

$$(x=0,1,5,10,\cdots,95)$$

により定義されるベータ分布 $Beta({}_n\alpha_x^i, {}_n\beta_x^i)$ を，（中央）死亡率の事前分布として置く。その後，各市区町村 j の死亡数 ${}_nD_x^{(i,j)}$ を，二項分布にしたがう確率変数の実現値とみなし，その実現確率を尤度関数として乗じることで事後分布を決定した。このとき，ベータ分布は二項分布の一般化であり共役性があることから，事後分布もまたベータ分布

$$Beta({}_n\alpha_x^i + {}_nD_x^{(i,j)}, {}_n\beta_x^i + 3 \cdot {}_nP_x^{(i,j)} - {}_nD_x^{(i,j)})$$

（ただしここで，$B^{(i,j)}\binom{\mathrm{H25}}{\mathrm{H27}}$，$B^{(i,j)}\binom{\mathrm{H26}}{\mathrm{H28}}$ を，都道府県 i 市区町村 j における平成25～27年，26～28年の出生数として，$3 \cdot P_0^{(i,j)} = \frac{1}{2} \cdot \{B^{(i,j)}\binom{\mathrm{H25}}{\mathrm{H27}} + B^{(i,j)}\binom{\mathrm{H26}}{\mathrm{H28}}\}$ と読み替える）となる。

この事後分布の期待値を（中央）死亡率のベイズ推定値として用いることで，市区町村別生命表を作成した。すなわち，

$$q_0^{(i,j)} = \frac{\alpha_0^i + D_0^{(i,j)}}{\alpha_0^i + \beta_0^i + \frac{1}{2} \cdot \{B^{(i,j)}\binom{\mathrm{H25}}{\mathrm{H27}} + B^{(i,j)}\binom{\mathrm{H26}}{\mathrm{H28}}\}}$$

$$= \frac{\alpha_0^i + \beta_0^i}{\alpha_0^i + \beta_0^i + \frac{1}{2} \cdot \{B^{(i,j)}\binom{\mathrm{H25}}{\mathrm{H27}} + B^{(i,j)}\binom{\mathrm{H26}}{\mathrm{H28}}\}} \cdot E_0^i$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \cdot \{B^{(i,j)}\binom{\mathrm{H25}}{\mathrm{H27}} + B^{(i,j)}\binom{\mathrm{H26}}{\mathrm{H28}}\}}{\alpha_0^i + \beta_0^i + \frac{1}{2} \cdot \{B^{(i,j)}\binom{\mathrm{H25}}{\mathrm{H27}} + B^{(i,j)}\binom{\mathrm{H26}}{\mathrm{H28}}\}} \cdot \tilde{q}_0^{(i,j)}$$

$$\cdots②$$

$${}_nm_x^{(i,j)} = \frac{{}_n\alpha_x^i + {}_nD_x^{(i,j)}}{{}_n\alpha_x^i + {}_n\beta_x^i + 3 \cdot {}_nP_x^{(i,j)}}$$

$$= \frac{{}_n\alpha_x^i + {}_n\beta_x^i}{{}_n\alpha_x^i + {}_n\beta_x^i + 3 \cdot {}_nP_x^{(i,j)}} \cdot {}_nE_x^i$$

$$+ \frac{{}_nP_x^{(i,j)}}{{}_n\alpha_x^i + {}_n\beta_x^i + 3 \cdot {}_nP_x^{(i,j)}} \cdot {}_n\tilde{m}_x^{(i,j)}$$

$$(x=1,5,10,15,\cdots,95)$$

$$\cdots②'$$

として，これに都道府県別生命表の

$${}_na_x^i = \frac{{}_nL_x^i - n \cdot l_{x+n}^i}{{}_nd_x^i}$$

を情報として付加することで，１歳以上の死亡率については，

$${}_nq_x^{(i,j)} = \frac{n \cdot {}_nm_x^{(i,j)}}{1 + (n - {}_na_x^i) \cdot {}_nm_x^{(i,j)}}$$

$$(x=1,5,10,15,\cdots,90)$$

とし，さらに定常人口を

$${}_nL_x^{(i,j)} = n \cdot l_{x+n}^{(i,j)} + {}_na_x^i \cdot {}_nd_x^{(i,j)}$$

$$(x=0,1,5,10,15,\cdots,90)$$

$${}_\infty L_{95}^{(i,j)} = \frac{{}_\infty d_{95}^{(i,j)}}{{}_\infty m_{95}^{(i,j)}}$$

により計算することで生命表を作成した。

ここで，（中央）死亡率の事後分布の分散は，

$${}_nV_x^{(i,j)} = \frac{({}_n\alpha_x^i + {}_nD_x^{(i,j)}) \cdot ({}_n\beta_x^i + 3 \cdot {}_nP_x^{(i,j)} - {}_nD_x^{(i,j)})}{({}_n\alpha_x^i + {}_n\beta_x^i + 3 \cdot {}_nP_x^{(i,j)})^2 \cdot ({}_n\alpha_x^i + {}_n\beta_x^i + 3 \cdot {}_nP_x^{(i,j)} + 1)}$$

$$\cdots③$$

となるが，これを形式的に①に代入し，

$$E(\{\hat{p}[x_i, x_j]\}^2) \to \hat{E}(\{\hat{p}[x_i, x_j]\}^2) \approx \{\hat{p}[x_i, x_j]\}^2 = \left(\frac{\hat{l}_{x_j}}{\hat{l}_{x_i}}\right)^2$$

$$\mathring{e}(x_{j+1}) \to \hat{\mathring{e}}(x_{j+1})$$

と置き換えることで，平均余命の標準誤差の推計式

$$\sqrt{V(\mathring{e}_x^{(i,j)})} = \sqrt{\sum_{t=x}^{90} \left(\frac{l_t^{(i,j)}}{l_x^{(i,j)}}\right)^2 \cdot (n - {}_na_t^i + \mathring{e}_{t+n}^{(i,j)})^2 \cdot {}_nV_t^{(i,j)}}$$

$$= \frac{1}{l_x^{(i,j)}} \sqrt{\sum_{t=x}^{90} (l_t^{(i,j)})^2 \cdot (n - {}_na_t^i + \mathring{e}_{t+n}^{(i,j)})^2 \cdot {}_nV_t^{(i,j)}}$$

$$(x=0,1,5,10,15,\cdots,90)$$

が導かれる。

Ⅴ　人口規模と標準誤差率の関係

②，②’からわかるとおり，死亡率のベイズ推定値は，都道府県 i の（中央）死亡率と市区町村 (i,j) の粗（中央）死亡率との，比

$$({}_n\alpha_x^i + {}_n\beta_x^i) : 3 \cdot {}_nP_x^{(i,j)}$$

での平均値であって，

$$\frac{{}_n\alpha_x^i}{{}_n\alpha_x^i + {}_n\beta_x^i} = {}_nE_x^i = \frac{{}_nD_x^i}{3 \cdot {}_nP_x^i}$$

が成り立っているのだから，

$\alpha+\beta \leftrightarrow$延べ人口，$\alpha \leftrightarrow$死亡数，$\beta \leftrightarrow$生存数の対応に意味があることがわかる。

その目で③をみると，

$$ {}_nV_x^{(i,j)} = \frac{({}_n\alpha_x^i + {}_nD_x^{(i,j)}) \cdot ({}_n\beta_x^i + 3 \cdot {}_nP_x^{(i,j)} - {}_nD_x^{(i,j)})}{({}_n\alpha_x^i + {}_n\beta_x^i + 3 \cdot {}_nP_x^{(i,j)})^2({}_n\alpha_x^i + {}_n\beta_x^i + 3 \cdot {}_nP_x^{(i,j)} + 1)} $$

$$ \approx \frac{(\text{死亡数}) \cdot (\text{生存数})}{(\text{人口})^3} $$

$$ = \frac{(\text{死亡率}) \cdot (\text{生存率})}{\text{人口}} $$

という形になっており，これはⅡで述べた。

$$ \hat{V}(\hat{q}) = \hat{V}(\hat{p}) = \frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{P} $$

のアナロジー（類似表現）となっている。市区町村間での人口の変動に比べたら，死亡率の変動は微々たるものなので，大まかな傾向でいうと，

$$ V\left(\mathring{e}_x^{(i,j)}\right) \propto \frac{1}{\text{人口}} $$

が成り立っていると考えられる。

そこで，平均寿命の誤差が，人口が大きくなるにつれて小さくなる様子を観察したいのだが，市区町村ごとの人口は文字どおり桁違いに異なっているため，そのままではいい図が描けない。そこで，（人口の常用対数）×（平均寿命の標準誤差率（%））を散布図にプロットすることにした（図１，２）。いずれも負の相関がみられ，相関係数は男－0.79，女－0.74であった。

図１　人口の常用対数×標準誤差率（男）

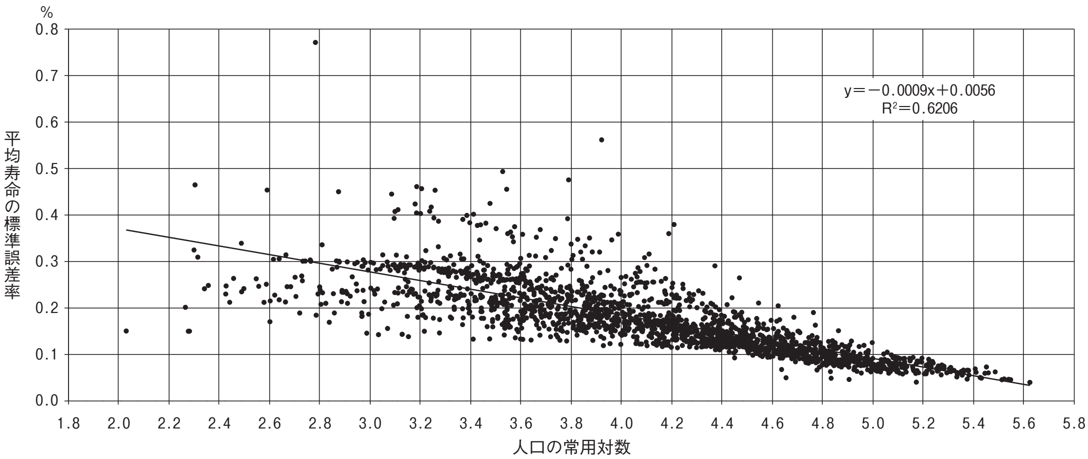
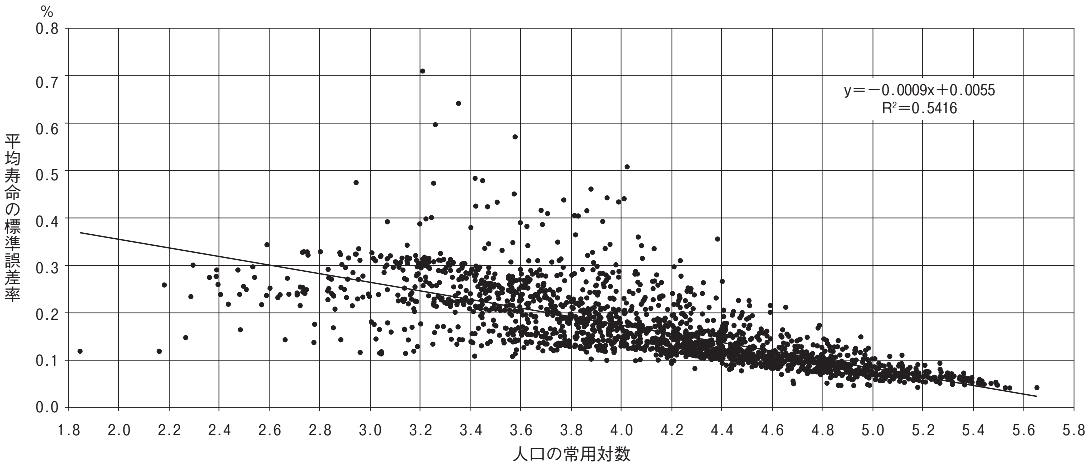


図２　人口の常用対数×標準誤差率（女）



Ⅵ　ま　と　め

「標準誤差」とは，確率変数としての推計値がしたがう分布の標準偏差として定義されるものであって，推計値が独立で同一の分布にしたがう何らかの確率変数の算術平均として表現できない場合には，中心極限定理が使えず，複雑な推計式による推計値の誤差評価は一般に困難なものとなる。

しかしながら，Chin Long Chiang氏の方法を使うことで，平均余命の分散は，

$$V\left(\hat{\mathring{e}}(x_i)\right)$$

$$= \sum_{j=i}^{\omega-2} E(\{\hat{p}[x_i,x_j]\}^2)\cdot\{n_j - a[x_j,x_{j+1}]$$

$$+\mathring{e}(x_{j+1})\}^2\cdot V(\hat{p}_j)$$

と評価することができる。

市区町村別生命表への応用にあたっては，生存率 $\hat{p}$ の分散として，事後分布の分散

$${}_nV_x^{(i,j)} = \frac{({}_n\alpha_x^i + {}_nD_x^{(i,j)})\cdot({}_n\beta_x^i + {}_nP_x^{(i,j)} - {}_nD_x^{(i,j)})}{({}_n\alpha_x^i + {}_n\beta_x^i + 3\cdot{}_nP_x^{(i,j)})^2\cdot({}_n\alpha_x^i + {}_n\beta_x^i + 3\cdot{}_nP_x^{(i,j)} + 1)}$$

を代入することで，平均余命の標準誤差を評価することが可能となる。

計算結果をみると，人口規模が大きいほど誤差が小さくなる傾向がみられ，人口の常用対数と平均寿命の標準誤差率の間の相関係数は，男－0.79，女－0.74であった。

最後に，本論文で以上述べたことは，筆者の個人的見解であることを申し添えておく。

文　　献

1）厚生労働省政策統括官（統計・情報政策，政策評価担当）．平成27年市区町村別生命表．2018.

2）鈴木勇紀，六車史．平成22年市区町村別生命表における平均余命の誤差評価について．厚生の指標　2013；60(16)：26-31.

3）厚生労働省大臣官房統計情報部．平成22年市区町村別生命表．2013.

4）Chin Long Chiang. The Life Table and Its Applications. 1984.