第70巻第８号「厚生の指標」2023年８月

第23回生命表の作成方法について

安川　学*（ヤスカワ　マナブ）

目的

本稿は，第23回生命表（令和２年完全生命表）の作成方法について，報告書よりもさらに踏み込んだ解説をし，各種数式についてなぜそうなるのか，その導出過程まで明らかにすることを目的とする。特に，Lagrangeの補間公式の微分ないし積分計算から導かれる，死力および定常人口の計算公式をすべて示す。

1　作成に用いた基礎資料

第23回生命表の作成に用いた基礎資料は次のとおりである。

(1)　令和２年，性・生年・年齢・月別死亡数（人口動態統計）：厚生労働省政策統括官（統計･情報政策担当）
(2)　令和２年，性・日（月）齢別乳児死亡数（人口動態統計）：厚生労働省政策統括官（統計･情報政策担当）
(3)　令和元年および２年，性・月別出生数（人口動態統計）：厚生労働省政策統括官（統計･情報政策担当）
(4)　令和２年10月１日現在，性・年齢・出生の月別日本人人口（国勢調査）：総務省統計局
(5)　令和２年10月１日現在，性・年齢別不詳補完日本人人口（国勢調査）：総務省統計局

2　基礎資料の補正

死亡数および出生数につき補正を行った。

（１）　2020(令和２)年死亡数の届出遅れの補正

基礎資料の死亡数は，2020年に死亡し，同年および翌年１月までに届け出られたものであるので，それ以降に遅れて届け出られるものを推定し，これを加えて2020年中の死亡数を補正した。

補正率rは，

$D(a)$：a年の死亡数で，翌年１月までに届け出られたもの

$d(a,p)$：a年の死亡数で，遅れてp年に届け出られたもの

として，

$$r=1+\frac{d(2019,2020)}{D(2019)}+\frac{d(2018,2020)}{D(2018)}+\frac{d(2017,2020)}{D(2017)}+\cdots+\frac{d(2012,2020)}{D(2012)}+\alpha$$

とした。ここでαは９年以上遅れて届け出られるものの率であるが，これについては，届出遅れはまれにしか起こらない事象であることから，Poisson分布に従うと考えて，２年遅れから８年遅れまでのデータを用い指数曲線をあてはめて求めた。

	男	女
r	1.0017267802	1.0004432660

（２）　2019年，2020年出生数の届出遅れの補正

死亡数と同様の方法により補正を行った。

	男	女
r	1.0004715643	1.0004899498

（３）　2020年10月１日現在日本人人口

2020年10月１日現在日本人人口については，年齢・国籍不詳人口をあん分した人口を各年齢の出生の月別にあん分した。

3　１歳未満の死亡率の計算

令和２年１年間の乳児死亡について，

＊厚生労働省政策統括官（統計・情報システム管理，労使関係担当）付参事官（企画調整担当）付審査解析室室長補佐

$D\binom{0w}{1w}$：日齢７日未満の死亡数,

$D\binom{1w}{2w}$：日齢７日以上，14日未満の死亡数,

$D\binom{2w}{3w}$：日齢14日以上，21日未満の死亡数,

$D\binom{3w}{4w}$：日齢21日以上，28日未満の死亡数,

$D\binom{4w}{2m}$：日齢28日以上，月齢２月未満の死亡数,

$D\binom{2m}{3m}$：月齢２月以上，３月未満の死亡数,

$D\binom{3m}{6m}$：月齢３月以上，６月未満の死亡数,

$D\binom{6m}{1y}$：月齢６月以上，１年未満の死亡数

とし，出生数については，2019年12月25日から2020年12月24日までの出生数を$B\binom{'19.12.25}{'20.12.24}$，2020年１月１日から同年12月31日までの出生数を$B\binom{'20.\ 1}{'20.12}$とし，以下，１年間の出生数を同じように表すと，出生により各日齢，月齢に達するまでの生存する確率は，

$$
\begin{aligned}
{}_{1w}p_0 &= 1-{}_{1w}q_0 \\
&= 1-\frac{D\binom{0w}{1w}}{\frac{1}{2}\left\{B\binom{'19.12.25}{'20.12.24}+B\binom{'20.\ 1}{'20.12}\right\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{2w}p_0 &= {}_{1w}p_0 \times {}_{1w}p_{1w} \\
&= {}_{1w}p_0 \times (1-{}_{1w}q_{1w}) \\
&= {}_{1w}p_0 \cdot \left(1-\frac{D\binom{1w}{2w}}{\frac{1}{2}\left\{B\binom{'19.12.18}{'20.12.17}+B\binom{'19.12.25}{'20.12.24}\right\}\times {}_{1w}p_0}\right) \\
&= {}_{1w}p_0-\frac{D\binom{1w}{2w}}{\frac{1}{2}\left\{B\binom{'19.12.18}{'20.12.17}+B\binom{'19.12.25}{'20.12.24}\right\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{3w}p_0 &= {}_{2w}p_0 \times {}_{1w}p_{2w} \\
&= {}_{2w}p_0 \times (1-{}_{1w}q_{2w}) \\
&= {}_{2w}p_0 \cdot \left(1-\frac{D\binom{2w}{3w}}{\frac{1}{2}\left\{B\binom{'19.12.11}{'20.12.10}+B\binom{'19.12.18}{'20.12.17}\right\}\times {}_{2w}p_0}\right) \\
&= {}_{2w}p_0-\frac{D\binom{2w}{3w}}{\frac{1}{2}\left\{B\binom{'19.12.11}{'20.12.10}+B\binom{'19.12.18}{'20.12.17}\right\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{4w}p_0 &= {}_{3w}p_0 \times {}_{1w}p_{3w} \\
&= {}_{3w}p_0 \times (1-{}_{1w}q_{3w}) \\
&= {}_{3w}p_0 \cdot \left(1-\frac{D\binom{3w}{4w}}{\frac{1}{2}\left\{B\binom{'19.12.4}{'20.12.3}+B\binom{'19.12.11}{'20.12.10}\right\}\times {}_{3w}p_0}\right) \\
&= {}_{3w}p_0-\frac{D\binom{3w}{4w}}{\frac{1}{2}\left\{B\binom{'19.12.4}{'20.12.3}+B\binom{'19.12.11}{'20.12.10}\right\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{2m}p_0 &= {}_{4w}p_0 \times {}_{2m-4w}p_{4w} \\
&= {}_{4w}p_0 \times (1-{}_{2m-4w}q_{4w}) \\
&= {}_{4w}p_0 \cdot \left(1-\frac{D\binom{4w}{2m}}{\frac{1}{2}\left\{B\binom{'19.11}{'20.10}+B\binom{'19.12.4}{'20.12.3}\right\}\times {}_{4w}p_0}\right) \\
&= {}_{4w}p_0-\frac{D\binom{4w}{2m}}{\frac{1}{2}\left\{B\binom{'19.11}{'20.10}+B\binom{'19.12.4}{'20.12.3}\right\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{3m}p_0 &= {}_{2m}p_0 \times {}_{1m}p_{2m} \\
&= {}_{2m}p_0 \times (1-{}_{1m}q_{2m}) \\
&= {}_{2m}p_0 \cdot \left(1-\frac{D\binom{2m}{3m}}{\frac{1}{2}\left\{B\binom{'19.10}{'20.\ 9}+B\binom{'19.11}{'20.10}\right\}\times {}_{2m}p_0}\right) \\
&= {}_{2m}p_0-\frac{D\binom{2m}{3m}}{\frac{1}{2}\left\{B\binom{'19.10}{'20.\ 9}+B\binom{'19.11}{'20.10}\right\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{6m}p_0 &= {}_{3m}p_0 \times {}_{3m}p_{3m} \\
&= {}_{3m}p_0 \times (1 - {}_{3m}q_{3m}) \\
&= {}_{3m}p_0 \cdot \left(1 - \frac{D\binom{3m}{6m}}{\frac{1}{2}\left\{ B\binom{'19.7}{'20.6} + B\binom{'19.10}{'20.\ 9} \right\} \times {}_{3m}p_0} \right) \\
&= {}_{3m}p_0 - \frac{D\binom{3m}{6m}}{\frac{1}{2}\left\{ B\binom{'19.7}{'20.6} + B\binom{'19.10}{'20.\ 9} \right\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_0 &= {}_{1y}p_0 \\
&= {}_{6m}p_0 \times {}_{1y-6m}p_{6m} \\
&= {}_{6m}p_0 \times (1 - {}_{1y-6m}q_{6m}) \\
&= {}_{6m}p_0 \cdot \left(1 - \frac{D\binom{6m}{1y}}{\frac{1}{2}\left\{ B\binom{'19.\ 1}{'19.12} + B\binom{'19.7}{'20.6} \right\} \times {}_{6m}p_0} \right) \\
&= {}_{6m}p_0 - \frac{D\binom{6m}{1y}}{\frac{1}{2}\left\{ B\binom{'19.\ 1}{'19.12} + B\binom{'19.7}{'20.6} \right\}}
\end{aligned}
$$

により求められる（レキシス図１参照）。ただし，

$$
B\binom{'19.12.25}{'20.12.24} = B\binom{'20.\ 1}{'20.12} + \frac{7}{31}\{B('19.12) - B('20.12)\}
$$

$$
B\binom{'19.12.18}{'20.12.17} = B\binom{'20.\ 1}{'20.12} + \frac{14}{31}\{B('19.12) - B('20.12)\}
$$

$$
B\binom{'19.12.11}{'20.12.10} = B\binom{'20.\ 1}{'20.12} + \frac{21}{31}\{B('19.12) - B('20.12)\}
$$

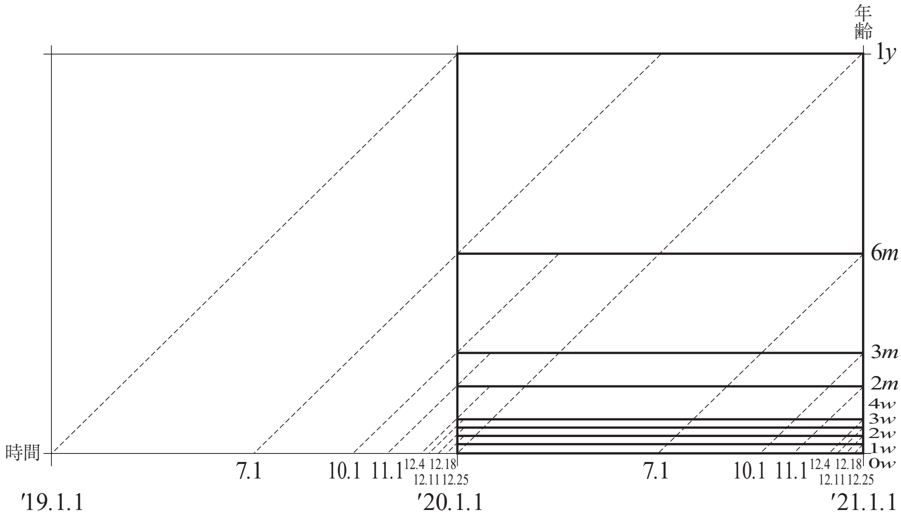
$$
B\binom{'19.12.4}{'20.12.3} = B\binom{'20.\ 1}{'20.12} + \frac{28}{31}\{B('19.12) - B('20.12)\}
$$

を用いた。ここで，B('19.12)およびB('20.12)は，それぞれ2019年12月および2020年12月中の出生数を表す。

これより生存率，死亡率を

$$
\begin{aligned}
{}_{1w}p_0 &= {}_{1w}p_0 & {}_{1w}q_0 &= 1 - {}_{1w}p_0 \\
{}_{1w}p_{1w} &= {}_{2w}p_0 / {}_{1w}p_0 & {}_{1w}q_{1w} &= 1 - {}_{1w}p_{1w} \\
{}_{1w}p_{2w} &= {}_{3w}p_0 / {}_{2w}p_0 & {}_{1w}q_{2w} &= 1 - {}_{1w}p_{2w} \\
{}_{1w}p_{3w} &= {}_{4w}p_0 / {}_{3w}p_0 & {}_{1w}q_{3w} &= 1 - {}_{1w}p_{3w} \\
{}_{2m-4w}p_{4w} &= {}_{2m}p_0 / {}_{4w}p_0 & {}_{2m-4w}q_{4w} &= 1 - {}_{2m-4w}p_{4w} \\
{}_{1m}p_{2m} &= {}_{3m}p_0 / {}_{2m}p_0 & {}_{1m}q_{2m} &= 1 - {}_{1m}p_{2m} \\
{}_{3m}p_{3m} &= {}_{6m}p_0 / {}_{3m}p_0 & {}_{3m}q_{3m} &= 1 - {}_{3m}p_{3m} \\
{}_{1y-6m}p_{6m} &= p_0 / {}_{6m}p_0 & {}_{1y-6m}q_{6m} &= 1 - {}_{1y-6m}p_{6m} \\
& & q_0 &= 1 - p_0
\end{aligned}
$$

レキシス図１



により求めた。

4　1歳以上の粗死亡率の計算

レキシス図２により説明する。図のように横軸に時間，縦軸に年齢をとる。線分XYを横切る生命線（各個人の出生点と死亡点とを結んだ線分）の数を$N(XY)$で表すと，粗死亡率q'_x（$x=1, 2, \cdots$，男女とも108）は，

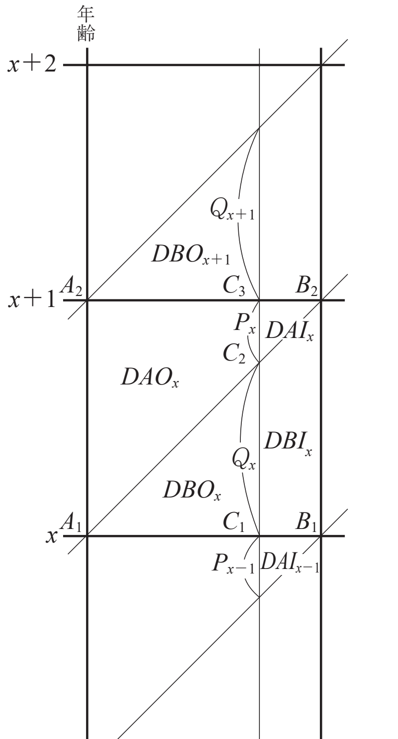
$$q'_x=1-\frac{N(B_1B_2)}{N(A_1B_1)}\cdot\frac{N(A_2B_2)}{N(A_1A_2)}$$

により求められる。

$N(C_1C_2)$，$N(C_2C_3)$は，2020年10月１日現在の日本人人口であるから，国勢調査の結果得られたものを用い，それぞれQ_x，P_xで表し，□$A_2A_1C_2C_3$内の死亡点の数をDAO_x，△$C_3C_2B_2$内の死亡点の数をDAI_x，△$C_2A_1C_1$内の死亡点の数をDBO_x，□$C_2C_1B_1B_2$内の死亡点の数をDBI_xとすると，各線分を横切る生命線の本数は，それぞれ

$$N(A_1B_1)=P_{x-1}-DAI_{x-1}+Q_x+DBO_x$$

レキシス図２



$$N(B_1B_2)=P_{x-1}+Q_x-DAI_{x-1}-DBI_x$$
$$N(A_1A_2)=P_x+Q_{x+1}+DAO_x+DBO_{x+1}$$
$$N(A_2B_2)=P_x-DAI_x+Q_{x+1}+DBO_{x+1}$$

となる。

5　死亡率の補整，延長

前項の方法により求めた粗死亡率について，１歳以上はGreville（1979）の３次９項の式による補整を行い，死亡率q_xを求めた。すなわち，

$$\begin{aligned}q_x=&-0.040724q'_{x-4}-0.009873q'_{x-3}\\&+0.118470q'_{x-2}+0.266557q'_{x-1}\\&+0.331140q'_x+0.266557q'_{x+1}\\&+0.118470q'_{x+2}-0.009873q'_{x+3}\\&-0.040724q'_{x+4}\end{aligned}$$

（$x=1,2,\cdots$,男女とも104）

ここでq'_x（$x=0,-1,-2,-3$）は，形式的に次式により外挿される。

$$\begin{aligned}q'_x=&1.352613q'_{x+1}+0.114696q'_{x+2}\\&-0.287231q'_{x+3}-0.180078q'_{x+4}\end{aligned}$$

（$x=0,-1,-2,-3$）

ただし，高齢部分については，死力をGompertz-Makeham関数にあてはめることにより，男女とも95歳から，さらに死亡率の補整および延長を行った。

死力μ_xをGompertz-Makeham関数にあてはめると，３つのパラメータを用いて，

$$\mu_x=\alpha+\beta e^{\gamma x}$$

と表され，このとき死亡率q_xは

$$\begin{aligned}q_x&=1-\exp\left(-\int_x^{x+1}\mu_t dt\right)\\&=1-\exp\left\{-\int_x^{x+1}(\alpha+\beta e^{\gamma t})dt\right\}\\&=1-\exp\left[-\left\{\alpha+\frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma}-1)e^{\gamma x}\right\}\right]\end{aligned}$$

により算出されることとなる。

そこで，粗死亡率についてGrevilleの３次９項の式による補整を行った後の死亡率を用いて，６と同様の方法により粗生存数l'_xおよび粗死力μ'_xを求め（⑵のただし書きを除く），このμ'_xに対して，

$$\sum_{x=x_0}^{x_1}\left(A+Be^{C(x-x_0)}-\mu'_x\right)^2$$

（x_0：男85，女90，x_1：男女とも103）

を最小にするような係数A，B，Cを求めた。この係数A，B，Cを用いて，男女とも95歳以上の死亡率q_xを

$$q_x = 1 - \exp\left[-\left\{A + \frac{B}{C}(e^C - 1)e^{C(x-x_0)}\right\}\right]$$

により求めた。係数の値は以下のとおりである。

	男	女
A	−0.2837006933	−0.1969280694
B	0.3497915594	0.2773975470
C	0.0437327292	0.0617857348

6　生命表諸関数値の計算

（1）　生存数l_x，死亡数${}_nd_x$

$l_0 = 100{,}000$

とし，１歳未満では，

$$
\begin{aligned}
&l_{1w} = l_0 \times {}_{1w}p_0, && {}_{1w}d_0 = l_0 - l_{1w},\\
&l_{2w} = l_{1w} \times {}_{1w}p_{1w}, && {}_{1w}d_{1w} = l_{1w} - l_{2w},\\
&l_{3w} = l_{2w} \times {}_{1w}p_{2w}, && {}_{1w}d_{2w} = l_{2w} - l_{3w},\\
&l_{4w} = l_{3w} \times {}_{1w}p_{3w}, && {}_{1w}d_{3w} = l_{3w} - l_{4w},\\
&l_{2m} = l_{4w} \times {}_{2m-4w}p_{4w}, && {}_{2m-4w}d_{4w} = l_{4w} - l_{2m},\\
&l_{3m} = l_{2m} \times {}_{1m}p_{2m}, && {}_{1m}d_{2m} = l_{2m} - l_{3m},\\
&l_{6m} = l_{3m} \times {}_{3m}p_{3m}, && {}_{3m}d_{3m} = l_{3m} - l_{6m},\\
&l_1 = l_{6m} \times {}_{1y-6m}p_{6m}, && {}_{1y-6m}d_{6m} = l_{6m} - l_1,\\
& && d_0 = l_0 - l_1
\end{aligned}
$$

により求め，１歳以上については，

$p_x = 1 - q_x$

とし，

$$l_{x+1} = l_x \times p_x, \qquad d_x = l_x - l_{x+1}$$

により，逐次l_xおよびd_xを求めた。すなわち，

$$
\begin{aligned}
&l_2 = l_1 \times p_1, && d_1 = l_1 - l_2,\\
&l_3 = l_2 \times p_2, && d_2 = l_2 - l_3,\\
&\cdots, && \cdots,\\
&l_{131} = l_{130} \times p_{130}, && d_{130} = l_{130} - l_{131},\\
& && d_{131} = l_{131}
\end{aligned}
$$

（2）　死力

死力μ_xは，生存数曲線l_tの微分係数を用いて，

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x} \cdot \left.\frac{dl_t}{dt}\right|_{t=x}$$

により定義される生命関数である。しかしながら，ここまでの計算で得られているのは，離散的な点列

$t = 0, 1w, 2w, 3w, 4w, 2m, 3m, 6m, 1, 2, \cdots, 131$

におけるl_tの値のみである。そこで，これらを基に，以下に述べる方法で，生存数曲線l_tの$t=x$における微分係数を評価し，死力を計算した。

（評価方法）順に並んだ上記点列から，$t=x$を中心とした連続する５点を取ってくると，それらを通るtに関する４次多項式が，各xに応じてただひとつ定まる。この多項式の$t=x$における微分係数をもって，生存数曲線l_tの$t=x$における微分係数の評価とした。ただし，$t=0w, 1w$に対しては，そこを中心とした連続する５点を取ることができないので，$t=2w$を中心とした連続する５点を通る４次多項式の，$t=0w, 1w$における微分係数をあてた。

（計算方法）Lagrangeの補間公式を利用すれば，当該多項式を明示的に書き下すことができ，そうすると，多項式の$t=x$における微分係数を，代数的に解くことが可能となる。代数計算を実行すると，微分係数は生存数の線形結合（重み付き平均）として表現されることがわかるので，それを死力の定義式に代入することで，死力を生存数の簡単な関数として評価する関係式が導かれる。その関係式に，すでに得られている生存数の値を代入することで，死力の値を求めた。

Lagrangeの補間公式

相異なるn個の点$x_1, \cdots, x_n$（$i \neq j$ならば$x_i \neq x_j$）における値$y_1, \cdots, y_n$が与えられたとき，

$y_i = g(x_i)\ (i = 1, \cdots, n)$

となるような，高々$(n-1)$次の多項式$g(t)$がただ１つ定まり，それは

$$g(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\prod_{\substack{j=1\\ j \neq i}}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

で与えられる。

たとえば，３歳以上の死力μ_xは以下のように計算した。xを中心とした連続する５点

$(x-2, l_{x-2}), (x-1, l_{x-1}), (x, l_x), (x+1, l_{x+1}),$
$(x+2, l_{x+2})$

を通るtに関する４次多項式（以下$g_x(t)$と書くことにする）は，Lagrangeの補間公式より，

$$
\begin{aligned}
g_x(t) &= \sum_{i=-2}^{2} l_{x+i} \times \left[\prod_{\substack{-2 \leq j \leq 2\\ j \neq i}} \frac{t-(x+j)}{i-j} \right]\\
&= \frac{l_{x-2}}{24}(t-x+1)(t-x)(t-x-1)(t-x-2)\\
&\quad - \frac{l_{x-1}}{6}(t-x+2)(t-x)(t-x-1)(t-x-2)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{l_x}{4}(t-x+2)(t-x+1)(t-x-1)(t-x-2)$$
$$-\frac{l_{x+1}}{6}(t-x+2)(t-x+1)(t-x)(t-x-2)$$
$$+\frac{l_{x+2}}{24}(t-x+2)(t-x+1)(t-x)(t-x-1)$$

と書き下されるので，これの$t=x$における微分係数を代数計算すると，

$$\begin{aligned}\frac{dg_x}{dt}(x)=&\frac{l_{x-2}}{24}(x-x+1)(x-x-1)(x-x-2)\\&-\frac{l_{x-1}}{6}(x-x+2)(x-x-1)(x-x-2)\\&+\frac{l_x}{4}\{(x-x+1)(x-x-1)(x-x-2)\\&+(x-x+2)(x-x-1)(x-x-2)\\&+(x-x+2)(x-x+1)(x-x-2)\\&+(x-x+2)(x-x+1)(x-x-1)\}\\&-\frac{l_{x+1}}{6}(x-x+2)(x-x+1)(x-x-2)\\&+\frac{l_{x+2}}{24}(x-x+2)(x-x+1)(x-x-1)\\=&\frac{1}{12}l_{x-2}-\frac{2}{3}l_{x-1}+\frac{2}{3}l_{x+1}-\frac{1}{12}l_{x+2}\end{aligned}$$

となる。この計算結果は，連続する５点における生存数の線形結合となっており（l_xの係数は０），一種の重み付き平均であると考えられる。ここで重みとは係数の和であり，微分計算なので，それは０になる（$l_{x-2}=l_{x-1}=l_x=l_{x+1}=l_{x+2}=1$の場合を考えよ）。

$$\frac{1}{12}-\frac{2}{3}+0+\frac{2}{3}-\frac{1}{12}=0$$

この計算結果を死力の定義式に代入することで，

$$\begin{aligned}\mu_x=&-\frac{1}{l_x}\cdot\left.\frac{dl_t}{dt}\right|_{t=x}\\\approx&-\frac{1}{l_x}\cdot\frac{dg_x}{dt}(x)\\=&\frac{8(l_{x-1}-l_{x+1})-(l_{x-2}-l_{x+2})}{12l_x}\\&\left(=\frac{1}{l_x}\left\{\frac{d_{x-1}+d_x}{2}+\frac{1}{6}\left(\frac{d_{x-1}+d_x}{2}-\frac{d_{x-2}+d_{x+1}}{2}\right)\right\}\right)\end{aligned}$$

なる関係式が導かれる。この関係式に，すでに得られている$l_{x-2}, l_{x-1}, l_x, l_{x+1}, l_{x+2}$の値を代入することで，死力$\mu_x$の値を求めた。

煩雑な代数計算を実行する必要があるが，３歳未満についても同様の関係式を導くことができ，それから死力の値が求まる。**付録１（10頁）**にすべての関係式を示す。いずれの関係式においても，係数の和は０になっていることが確かめられる。

ただし，Gompertz-Makeham関数をあてはめて補整および延長した部分（男女とも95歳以上）については，

$$\mu_x=A+Be^{C(x-x_0)}$$

とした。

（３） 定常人口${}_nL_x$，T_xおよび平均余命$\mathring{e}_x$

定常人口${}_nL_x$は，生存数曲線l_tの積分

$${}_nL_x=\int_x^{x+n}l_t dt$$

により定義される生命関数である。生存数曲線l_tの区間［$x, x+n$］上の積分値は，前記の多項式$g_x(t)$の当該区間上の積分値をもって評価した。ただし，区間［$0, 1w$］，［$1w, 2w$］に対しては，多項式$g_{2w}(t)$を被積分関数にあてた。

たとえば，３歳以上の定常人口L_xは以下のように計算した。多項式$g_x(t)$の区間［$x, x+1$］上の積分計算をする際に，$t-x$を改めてtと置く変数変換を施すことで，当該積分は，パラメータxを含まないtに関する定数係数多項式の区間［０，１］上の積分へと置換されることがわかる。すなわち，

$$\begin{aligned}L_x=&\int_x^{x+1}l_t dt\\\approx&\int_x^{x+1}g_x(t)dt\\=&\frac{l_{x-2}}{24}\int_x^{x+1}(t-x+1)(t-x)(t-x-1)(t-x-2)dt\\&-\frac{l_{x-1}}{6}\int_x^{x+1}(t-x+2)(t-x)(t-x-1)(t-x-2)dt\\&+\frac{l_x}{4}\int_x^{x+1}(t-x+2)(t-x+1)(t-x-1)(t-x-2)dt\\&-\frac{l_{x+1}}{6}\int_x^{x+1}(t-x+2)(t-x+1)(t-x)(t-x-2)dt\\&+\frac{l_{x+2}}{24}\int_x^{x+1}(t-x+2)(t-x+1)(t-x)(t-x-1)dt\\=&\frac{11}{720}l_{x-2}-\frac{37}{360}l_{x-1}+\frac{19}{30}l_x+\frac{173}{360}l_{x+1}-\frac{19}{720}l_{x+2}\end{aligned}$$

となる。この計算結果も，連続する５点における生存数の線形結合となっており，一種の重み付き平均であると考えられる。積分計算なので，係数の和は積分区間の幅（この場合は１）に等しくな

る（$l_{x-2}=l_{x-1}=l_x=l_{x+1}=l_{x+2}=1$の場合を考えよ）。

$$\frac{11}{720}-\frac{37}{360}+\frac{19}{30}+\frac{173}{360}-\frac{19}{720}=1$$

この関係式に，すでに得られているl_{x-2}, l_{x-1}, l_x, l_{x+1}, l_{x+2}の値を代入することで，定常人口L_xの値を求めた。またこの関係式は，（台形公式）＋（剰余項）の形をした対称式

$$L_x=\frac{l_x+l_{x+1}}{2}-\frac{1}{12}\left(\frac{l_{x+2}-l_x}{2}-\frac{l_{x+1}-l_{x-1}}{2}\right)+\frac{11}{360}\left(3l_x-4\cdot\frac{l_x+l_{x+1}}{2}+\frac{l_{x-2}+l_{x+2}}{2}\right)$$

としても書き下すことができ，いわゆるEuler–Maclaurinの総和公式の差分表現の一種とみなすことができる。

死力のときと同じく，３歳未満についても同様の関係式を導くことができ，それから定常人口の値が求められる。付録２（11頁）にすべての関係式を示す（付録１以上に煩雑な式となっているが，最初の一度だけ手間を惜しまず式を書き込めば，以後の手間が省ける。エクセルでもプログラムと同じ結果を再現できることを当方で確認済み）。いずれの関係式においても，係数の和は積分区間の幅に等しくなっている（大カッコ［　］内の係数の和が１になっている）ことが確かめられる。

これから，定常人口T_xを，

$$T_x=\sum_{t=x}^{129} {}_{n(t)}L_t$$

により求めた。ただし，

$n(0)=n(1w)=n(2w)=n(3w)=1w$,

$n(4w)=2m-4w$,

$n(2m)=1m, n(3m)=3m$, $n(6m)=1y-6m$,

$n(t)=1 (t=1,2,\cdots,129)$

である。

また，平均余命$\mathring{e}_x$は

$$\mathring{e}_x=\frac{T_x}{l_x}$$

により求めた。

7　計算桁数について

(1)　今回の生命表の計算では，倍精度浮動小数点数（2^{53}：十進法でおよそ16桁）による演算を行った。

(2)　定常人口${}_nL_x$の計算は129歳まで行ったが，発表する生命表の上限年齢は，生存数l_xが0.5以上となる年齢にとどめた。

(3)　発表した数値は四捨五入した数値である。

付録1　3歳未満における死力と生存数の関係式

（ただし，時間の単位は年であり，$\alpha=1w=7日=\frac{7}{365}$，$\beta=1m=1月=\frac{1}{12}$としている）

$$\mu_0=-\frac{1}{l_0}\cdot\frac{dg_{2w}}{dt}(0)=\frac{25l_0-48l_{1w}+36l_{2w}-16l_{3w}+3l_{4w}}{12\alpha\cdot l_0}$$

$$\mu_{1w}=-\frac{1}{l_{1w}}\cdot\frac{dg_{2w}}{dt}(\alpha)=\frac{3l_0+10l_{1w}-18l_{2w}+6l_{3w}-l_{4w}}{12\alpha\cdot l_{1w}}$$

$$\mu_{2w}=-\frac{1}{l_{2w}}\cdot\frac{dg_{2w}}{dt}(2\alpha)=\frac{8(l_{1w}-l_{3w})-(l_0-l_{4w})}{12\alpha\cdot l_{2w}}$$

$$\mu_{3w}=\frac{1}{l_{3w}}\left\{-\frac{2\beta-3\alpha}{6\alpha(2\beta-\alpha)}l_{1w}+\frac{2\beta-3\alpha}{2\alpha(\beta-\alpha)}l_{2w}-\frac{2\beta-5\alpha}{2\alpha(2\beta-3\alpha)}l_{3w}-\frac{2\beta-3\alpha}{6\alpha(\beta-2\alpha)}l_{4w}\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha^3}{2(\beta-\alpha)(\beta-2\alpha)(2\beta-\alpha)(2\beta-3\alpha)}l_{2m}\right\}$$

$$\mu_{4w}=\frac{1}{l_{4w}}\left\{-\frac{(\beta-2\alpha)(3\beta-4\alpha)}{2\alpha(\beta-\alpha)(3\beta-2\alpha)}l_{2w}+\frac{4(\beta-2\alpha)(3\beta-4\alpha)}{3\alpha(\beta-\alpha)(2\beta-3\alpha)}l_{3w}-\frac{9\beta^2-35\alpha\beta+32\alpha^2}{2\alpha(\beta-2\alpha)(3\beta-4\alpha)}l_{4w}\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha^2(3\beta-4\alpha)}{2\beta(\beta-\alpha)(\beta-2\alpha)(2\beta-3\alpha)}l_{2m}+\frac{4\alpha^2(\beta-2\alpha)}{3\beta(\beta-\alpha)(3\beta-2\alpha)(3\beta-4\alpha)}l_{3m}\right\}$$

$$\mu_{2m}=\frac{1}{l_{2m}}\left\{-\frac{8\beta^2(\beta-2\alpha)}{9\alpha(\beta-\alpha)(2\beta-\alpha)(2\beta-3\alpha)}l_{3w}+\frac{\beta^2(2\beta-3\alpha)}{\alpha(\beta-2\alpha)(3\beta-2\alpha)(3\beta-4\alpha)}l_{4w}+\frac{2\beta^2-21\alpha\beta+30\alpha^2}{4\beta(\beta-2\alpha)(2\beta-3\alpha)}l_{2m}\right.$$
$$\left.-\frac{8(\beta-2\alpha)(2\beta-3\alpha)}{9\beta(\beta-\alpha)(3\beta-4\alpha)}l_{3m}+\frac{(\beta-2\alpha)(2\beta-3\alpha)}{36\beta(2\beta-\alpha)(3\beta-2\alpha)}l_{6m}\right\}$$

$$\mu_{3m}=\frac{1}{l_{3m}}\left\{-\frac{3\beta^2(1-3\beta)}{4(\beta-2\alpha)(3\beta-2\alpha)(3\beta-4\alpha)(1-4\alpha)}l_{4w}+\frac{3(3\beta-4\alpha)(1-3\beta)}{8\beta(\beta-2\alpha)(1-2\beta)}l_{2m}-\frac{9\beta-8\alpha-36\beta(\beta-\alpha)}{3\beta(3\beta-4\alpha)(1-3\beta)}l_{3m}\right.$$
$$\left.-\frac{(3\beta-4\alpha)(1-3\beta)}{24\beta(3\beta-2\alpha)(1-6\beta)}l_{6m}+\frac{3\beta^2(3\beta-4\alpha)}{(1-4\alpha)(1-2\beta)(1-3\beta)(1-6\beta)}l_1\right\}$$

$$\mu_{6m}=\frac{1}{l_{6m}}\left\{-\frac{3(1-3\beta)(1-6\beta)}{4\beta(1-\beta)(1-2\beta)}l_{2m}+\frac{8(1-6\beta)}{3\beta(2-3\beta)}l_{3m}-\frac{7-81\beta+198\beta^2}{12\beta(1-3\beta)(1-6\beta)}l_{6m}-\frac{24\beta^2}{(1-2\beta)(1-6\beta)}l_1\right.$$
$$\left.+\frac{3\beta^2(1-6\beta)}{(1-\beta)(1-3\beta)(2-3\beta)}l_2\right\}$$

$$\mu_1=\frac{1}{l_1}\left\{-\frac{2(1-6\beta)}{9\beta(1-\beta)(1-3\beta)(2-3\beta)}l_{3m}+\frac{1}{9\beta(1-2\beta)(1-6\beta)}l_{6m}-\frac{1+9\beta-54\beta^2}{2(1-3\beta)(1-6\beta)}l_1-\frac{1-6\beta}{2-3\beta}l_2\right.$$
$$\left.+\frac{(1-3\beta)(1-6\beta)}{18(1-\beta)(1-2\beta)}l_3\right\}$$

$$\mu_2=\frac{1}{l_2}\left\{-\frac{1}{6(1-2\beta)(1-3\beta)(1-6\beta)(2-3\beta)}l_{6m}+\frac{2(1-3\beta)}{3(1-6\beta)}l_1-\frac{3\beta}{2(1-3\beta)}l_2-\frac{2(1-3\beta)}{3(1-2\beta)}l_3+\frac{1-3\beta}{6(2-3\beta)}l_4\right\}$$

付録2　3歳未満における定常人口と生存数の関係式

$$ {}_{1w}L_0=\int_0^{\alpha} g_{2w}(t)\,dt=\alpha\left[\frac{251}{720}l_0+\frac{323}{360}l_{1w}-\frac{11}{30}l_{2w}+\frac{53}{360}l_{3w}-\frac{19}{720}l_{4w}\right] $$

$$ {}_{1w}L_{1w}=\int_{\alpha}^{2\alpha} g_{2w}(t)\,dt=\alpha\left[-\frac{19}{720}l_0+\frac{173}{360}l_{1w}+\frac{19}{30}l_{2w}-\frac{37}{360}l_{3w}+\frac{11}{720}l_{4w}\right] $$

$$ {}_{1w}L_{2w}=\int_{2\alpha}^{3\alpha} g_{2w}(t)\,dt=\alpha\left[\frac{11}{720}l_0-\frac{37}{360}l_{1w}+\frac{19}{30}l_{2w}+\frac{173}{360}l_{3w}-\frac{19}{720}l_{4w}\right] $$

$$ {}_{1w}L_{3w}=\alpha\left[\frac{30\beta-53\alpha}{360(2\beta-\alpha)}l_{1w}-\frac{25\beta-44\alpha}{120(\beta-\alpha)}l_{2w}+\frac{190\beta-323\alpha}{120(2\beta-3\alpha)}l_{3w}+\frac{135\beta-251\alpha}{360(\beta-2\alpha)}l_{4w}\right. $$
$$ \left.-\frac{19\alpha^4}{120(\beta-\alpha)(\beta-2\alpha)(2\beta-\alpha)(2\beta-3\alpha)}l_{2m}\right] $$

$$ {}_{2m-4w}L_{4w}=(2\beta-4\alpha)\left[\frac{(\beta-2\alpha)^2(9\beta^2-16\alpha\beta+6\alpha^2)}{30\alpha^2(\beta-\alpha)(3\beta-2\alpha)}l_{2w}-\frac{2(\beta-2\alpha)^2(9\beta^2-6\alpha\beta-4\alpha^2)}{45\alpha^2(\beta-\alpha)(2\beta-3\alpha)}l_{3w}+\frac{9\beta^3-14\alpha\beta^2+13\alpha^2\beta-12\alpha^3}{30\alpha^2(3\beta-4\alpha)}l_{4w}\right. $$
$$ \left.+\frac{21\beta^3-51\alpha\beta^2+37\alpha^2\beta-8\alpha^3}{30\beta(\beta-\alpha)(2\beta-3\alpha)}l_{2m}-\frac{2(\beta-2\alpha)^2(6\beta^2-9\alpha\beta+4\alpha^2)}{45\beta(\beta-\alpha)(3\beta-2\alpha)(3\beta-4\alpha)}l_{3m}\right] $$

$$ {}_{1m}L_{2m}=\beta\left[\frac{\beta^3(87\beta-140\alpha)}{540\alpha(\beta-\alpha)(2\beta-\alpha)(2\beta-3\alpha)}l_{3w}-\frac{\beta^3(29\beta-35\alpha)}{80\alpha(\beta-2\alpha)(3\beta-2\alpha)(3\beta-4\alpha)}l_{4w}+\frac{199\beta^2-595\alpha\beta+440\alpha^2}{160(\beta-2\alpha)(2\beta-3\alpha)}l_{2m}\right. $$
$$ \left.+\frac{708\beta^2-1855\alpha\beta+1200\alpha^2}{540(\beta-\alpha)(3\beta-4\alpha)}l_{3m}-\frac{63\beta^2-175\alpha\beta+120\alpha^2}{4320(2\beta-\alpha)(3\beta-2\alpha)}l_{6m}\right] $$

$$ {}_{3m}L_{3m}=3\beta\left[\frac{3\beta^3(25-117\beta)}{80(\beta-2\alpha)(3\beta-2\alpha)(3\beta-4\alpha)(1-4\alpha)}l_{4w}-\frac{3(45\beta-207\beta^2-40\alpha+180\alpha\beta)}{160(\beta-2\alpha)(1-2\beta)}l_{2m}\right. $$
$$ +\frac{85\beta-80\alpha+340\alpha\beta-372\beta^2}{20(3\beta-4\alpha)(1-3\beta)}l_{3m}+\frac{155\beta-120\alpha+620\alpha\beta-813\beta^2}{160(3\beta-2\alpha)(1-6\beta)}l_{6m} $$
$$ \left.-\frac{3\beta^3(117\beta-100\alpha)}{20(1-4\alpha)(1-2\beta)(1-3\beta)(1-6\beta)}l_1\right] $$

$$ {}_{1y-6m}L_{6m}=(1-6\beta)\left[\frac{(1-6\beta)^2(7-9\beta-18\beta^2)}{480\beta^2(1-\beta)(1-2\beta)}l_{2m}-\frac{(1-6\beta)^2(7+6\beta-48\beta^2)}{180\beta^2(1-3\beta)(2-3\beta)}l_{3m}+\frac{7+9\beta+156\beta^2-612\beta^3}{1440\beta^2(1-3\beta)}l_{6m}\right. $$
$$ \left.+\frac{18-59\beta+84\beta^2-108\beta^3}{60(1-2\beta)(1-3\beta)}l_1-\frac{(1-6\beta)^2(3-\beta+18\beta^2)}{240(1-\beta)(1-3\beta)(2-3\beta)}l_2\right] $$

$$ L_1=\frac{11-45\beta}{270\beta(1-\beta)(1-3\beta)(2-3\beta)}l_{3m}-\frac{22-45\beta}{1080\beta(1-2\beta)(1-3\beta)(1-6\beta)}l_{6m}+\frac{29-195\beta+300\beta^2}{40(1-3\beta)(1-6\beta)}l_1 $$
$$ +\frac{36-195\beta+240\beta^2}{40(1-3\beta)(2-3\beta)}l_2-\frac{23-135\beta+180\beta^2}{1080(1-\beta)(1-2\beta)}l_3 $$

$$ L_2=\frac{11}{360(1-2\beta)(1-3\beta)(1-6\beta)(2-3\beta)}l_{6m}-\frac{37-90\beta}{360(1-6\beta)}l_1+\frac{76-195\beta}{120(1-3\beta)}l_2+\frac{173-390\beta}{360(1-2\beta)}l_3-\frac{19-45\beta}{360(2-3\beta)}l_4 $$